A PROBLEM FOR NAÏVE THEORIES OF PROPERTIES

Greg Restall

http://consequently.org

May 21, 2009

THE RULES

$$\frac{\bot}{\phi}\,[\bot E] \qquad \frac{\phi(t)}{t \in \langle x{:}\phi(x)\rangle}\,[\in I] \qquad \frac{t \in \langle x{:}\phi(x)\rangle}{\phi(t)}\,[\in E] \qquad \frac{t \in S \quad S = T}{t \in T}\,[= E] \qquad \frac{\begin{array}{cc}[a \in S] & [a \in T]\\ \vdots & \vdots \\ a \in T & a \in S\end{array}}{S = T}\,[= I]$$

(In [$=I$] the subproofs have no other premises, and a does not occur in the conclusion.)

THE PROBLEMATIC PROPERTY

Let P be $\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle$. Then we have:

$$\frac{\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle}{\langle y{:}\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}\,[\in E] \quad \text{that is,} \quad \frac{P \in P}{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}\,[\in E]$$

$$\frac{\langle y{:}\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}{a \in \langle y{:}\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle\rangle}\,[\in I] \quad \text{that is,} \quad \frac{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}{a \in \langle y{:}P \in P\rangle}\,[\in I]$$

$$\frac{a \in \langle y{:}\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle\rangle}{\langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle \in \langle x{:}\langle y{:}x \in x\rangle = \langle y{:}\bot\rangle\rangle}\,[\in E] \quad \text{that is,} \quad \frac{a \in \langle y{:}P \in P\rangle}{P \in P}\,[\in E]$$

THE PROOF

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}P \in P\rangle]^* \quad \dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}P \in P\rangle]^*}{P \in P}[\in E]}{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}[\in E]}{a \in \langle y{:}\bot\rangle}[= E] \quad \dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}\bot\rangle]^*}{\bot}[\in E]}{a \in \langle y{:}P \in P\rangle}[\bot E]}{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}[= I^*]}{a \in \langle y{:}P \in P\rangle}[\in I] \quad \dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}P \in P\rangle]^\dagger \quad \dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}P \in P\rangle]^\dagger}{P \in P}[\in E]}{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}[\in E]}{a \in \langle y{:}\bot\rangle}[= E] \quad \dfrac{\dfrac{[a \in \langle y{:}\bot\rangle]^\dagger}{\bot}[\in E]}{a \in \langle y{:}P \in P\rangle}[\bot E]}{\langle y{:}P \in P\rangle = \langle y{:}\bot\rangle}[= I^\dagger]}{\dfrac{a \in \langle y{:}\bot\rangle}{\bot}[\in E]}[= E]$$